

# Një vështrim mbi konceptet e probabilitetit

## Qëllimet

Pas përfundimit të kësaj ligjrate ju duhet të jeni në gjendje që të:

- ☞ Definoni **probabilitetin**.
- ☞ Kuptoni termet: **eksperimenti (prova), rezultati, ngjarja**.
- ☞ Përshkruani *qasjet klasike, empirike dhe subjektive* të probabilitetit dhe të bëni dallimet në mes të tyre.
- ☞ Njihni disa nga *rregullat e llogaritjes së probabiliteteve*.
- ☞ Definoni termet: *probabiliteti i kushtëzuar* dhe *probabiliteti i përbashkët*.
- ☞ Njihni disa nga *rregullat e llogaritjes së rasteve të volitshme* (permutacionet, variacionet, kombinacionet)

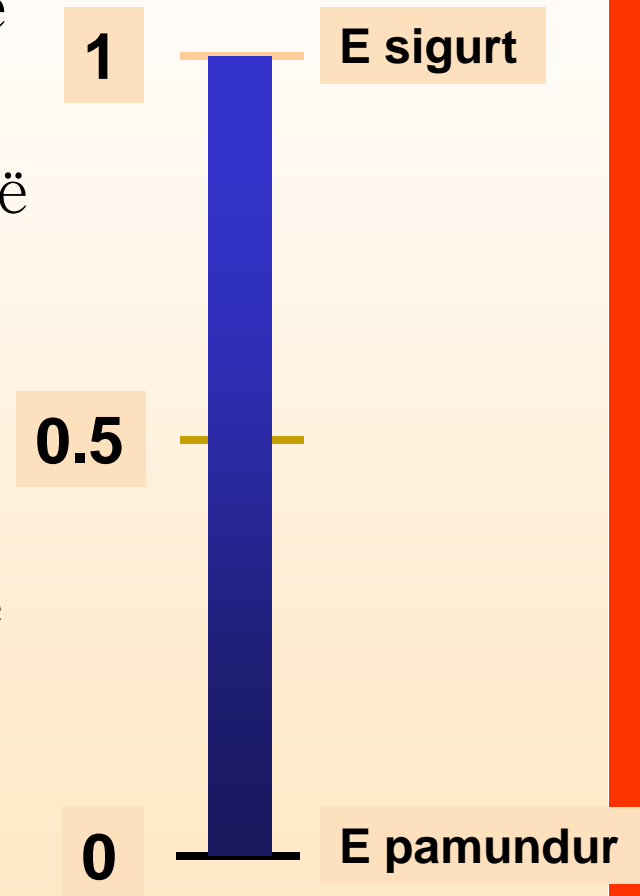
- Probabiliteti është një matës numerik për gjasat se një ngjarje do të ndodhë.
- Probabiliteti i një ngjarje duhet të jetë në mes të 0 dhe 1.

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad \text{Për çfarëdo ngjarje } A$$

- Shuma e probabiliteteve të të gjitha ngjarjeve reciprokisht përjashtuese/të papajtueshme/ duhet të jetë i barabartë me 1.

$$P(A) + P(B) + P(C) = 1$$

Nëse A, B, dhe C janë reciprokisht përjashtuese dhe te domosdoshme



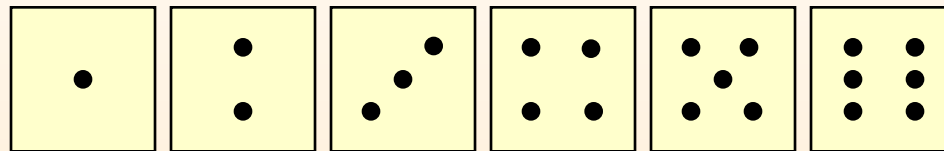
## Definicionet

- ❑ **Probabiliteti:** Matja e gjasave se një ngjarje e pasigurt mund të ndodhë në të ardhmen; mund të marrë vlera vetëm në mes të 0 dhe 1.
- ❑ **Prova/Eksperimenti:** Vështrimi (vrojtimi ) i disa aktiviteteve ose veprimi i marrjes së ca matjeve, gjegjësisht një proces që shpjen deri te paraqitja e një (dhe vetëm një) nga disa vrojtme të mundshme.
- ❑ **Rezultati:** Rezultati i pjesshëm i një eksperimenti.
- ❑ **Ngjarja:** Grumbullimi i një apo më shumë rezultateve të një eksperimenti.

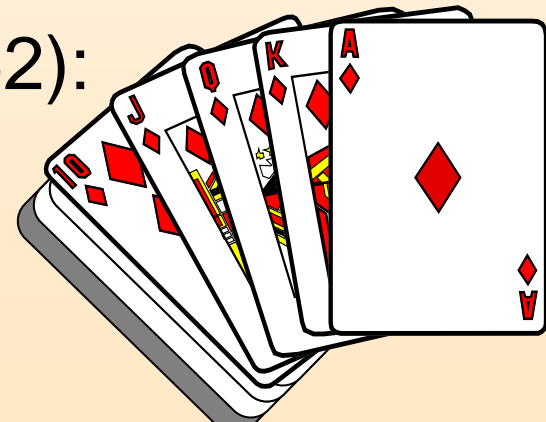
## Hapësira e mostrës/ rezultatet e mundshme

**Hapësira e mostrës** /është mbledhja e të gjitha ngjarjeve të mundshme

p.sh. Të gjitha faqet e zarit/kubit (6):



P.sh. Të gjitha letrat e bixhozit (52):



## Shembuj të eksperimentit, rezultatit dhe hapësirës së mostrës

Eksperimenti	Rezultati	Hapësira e mostrës
Gjuajtja e monedhës	Stema (S) , numri (N)	$S = \{ \text{Stema, Numri} \}$
Gjuajtja e zarit	1,2,3,4,5,6	$S = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$
Gjuajta e monedhës dy herë	NN, NS, SN, SS	$S = \{ \text{NN, NS, SN, SS} \}$
Loja në lotari	Fitim, Humbje	$S = \{ \text{Fitim, Humbje} \}$
Dhënja e provimit	Me kalu, mos me kalu	$S = \{ \text{Me kalu, mos me kalu} \}$
Zgjedhja e studentëve	Mashkull, Femer	$S = \{ \text{Mashkull, Femer} \}$

- Ngjarje e thjeshtë

- Një rezultat nga të gjitha rezultatet e mundshme me një karakteristikë.
- P.sh., Karta e kuqe nga letrat e bixhozit.

- Ngjarje komplementare e A (e shënuar  $\sim A$ )

- Të gjitha rezultatet që nuk janë pjesë e ngjarjes A
- P.sh. Të gjitha letrat që nuk janë me shenjën e rombit.

- Ngjarje e përbashkët

- Përfshin dy e më shumë karakteristika/ngjarje që paraqiten njëkohësisht.
- P.sh., Një As që është gjithashtu i kuq.

# Vlerësimi i probabilitetit/Qasjet e probabilitetit

- Janë tri qasje për vlerësimin e probabilitetit të ndodhjes së një ngjarje të pasigurt:

## 1. *a priori* probabiliteti klasik

$$\text{probabiliteti} = \frac{m}{n} = \frac{\text{numri i rezultateve te favorshme}}{\text{numri } total \text{ i rezultateve te mundshme}}$$

## 2. a posteriori probabiliteti klasik empirik/frekuenca relative

$$\text{Probabiliteti} = \frac{\text{Numri ngjarjeve qe kane ndodhur ne te kaluaren}}{\text{Numri total i vrojtimeve}} = \frac{m}{n}$$

## 3. Probabiliteti subjektiv

Një vlerësim apo opinion individual rreth probabilitetit të ndodhjes së ngjarjes.

## Qasjet e probabilitetit

- Probabiliteti klasik bazohet në supozimin se rezultatet e një eksperimenti kanë mundësi të barabarta.

- Sipas pikëpamjes klasike ,

$$\text{Probabiliteti i nje ngjarje} = \frac{\text{Numri i rezultateve te favorshme}}{\text{Numri i pergjithshem i rezultateve te mundshme}}$$

$$P = \frac{m}{n}$$



## SHEMBULL 1

- Marrim në konsiderim eksperimentin e hudhjes së dy monedhave metalike në të njëjtën kohë.
- Numri i rasteve të mundshme  $S = \{NN, NS, SN, SS\}$
- Marrim në konsiderim ngjarjen për një N.
- Probabiliteti për me ra numri  $= 2/4 = 1/2$ .

## Ngjarjet reciprokisht përjashtuese/të papajtueshme

- Ngjarjet reciprokisht përjashtuese/të papajtueshme/: Paraqitja e ndonjë ngjarje nënkupton se të tjerat nuk mund të ndodhin në të njejtën kohë.
- Në **SHEMBULLIN 1**, katër rezultatet e mundshme janë reciprokisht përjashtuese/ të papajtueshme.

## Ngjarjet e domosdoshme

- **Ngjarjet e domosdoshme** : Më së paku një ngjarje duhet të ndodhë kur bëhet një eksperiment.
- Në **SHEMBULLIN 1**, katër rezultatet e mundshme janë ngjarje të domosdoshme. Me fjalë të tjera shuma e probabiliteteve është  $= 1$  ( $0.25 + 0.25 + 0.25 + 0.25$ ).

## Koncepti i frekuencave relative/Koncepti empirik

- Probabiliteti i një ngjarje që ka ndodhur në afat të gjatë përcaktohet nga vështrimi se çfarë pjese e kohës si ngjarja ka ndodhur në të kaluarën:

$$\text{Probabiliteti i nje ngjarje} = \frac{\text{Numri i rezultateve qe kane ndodhur ne te kaluaren}}{\text{Numri total i vrojtimeve}}$$

# Probabiliteti empirik/koncepti i frekuencave relative

Supozojme se dëshirojmë të llogarisim probabilitetet e këtyre ngjarjeve:

- Probabilitetin se automobili i ardhshëm i prodhuar nga fabrika do të jetë me “defekt”.
- Probabilitetin se një familje e zgjedhur rastësisht ka shtëpi te veten.
- Probabilitetin se një grua e zgjedhur rastësisht nuk e punë duhanin.
- Probabilitetin se një tetëdhjetëvjeçar do të jetoj më së paku edhe një vjet, etj.

- Dhjetë nga 500 automobila të zgjedhur rastësisht të prodhuar në një fabrikë kanë qenë me defekt. Sa është probabiliteti që automobili i ardhshëm i prodhuar nga kjo fabrikë të jetë me defekt.

- $n=500$

$$P(A) = 10/500=0.02$$

- $m=10$

**Shpërndarja e frekuencave dhe frekuencave relative në mostrën prej 500 automobilave**

Automobili	Frekuenca	Frekuenca relative
I rregullt	490	$490/500=0.98$
Me defekt	10	$10/500=0.02$
Gjithsej	500	1.00

## SHEMBULL 2

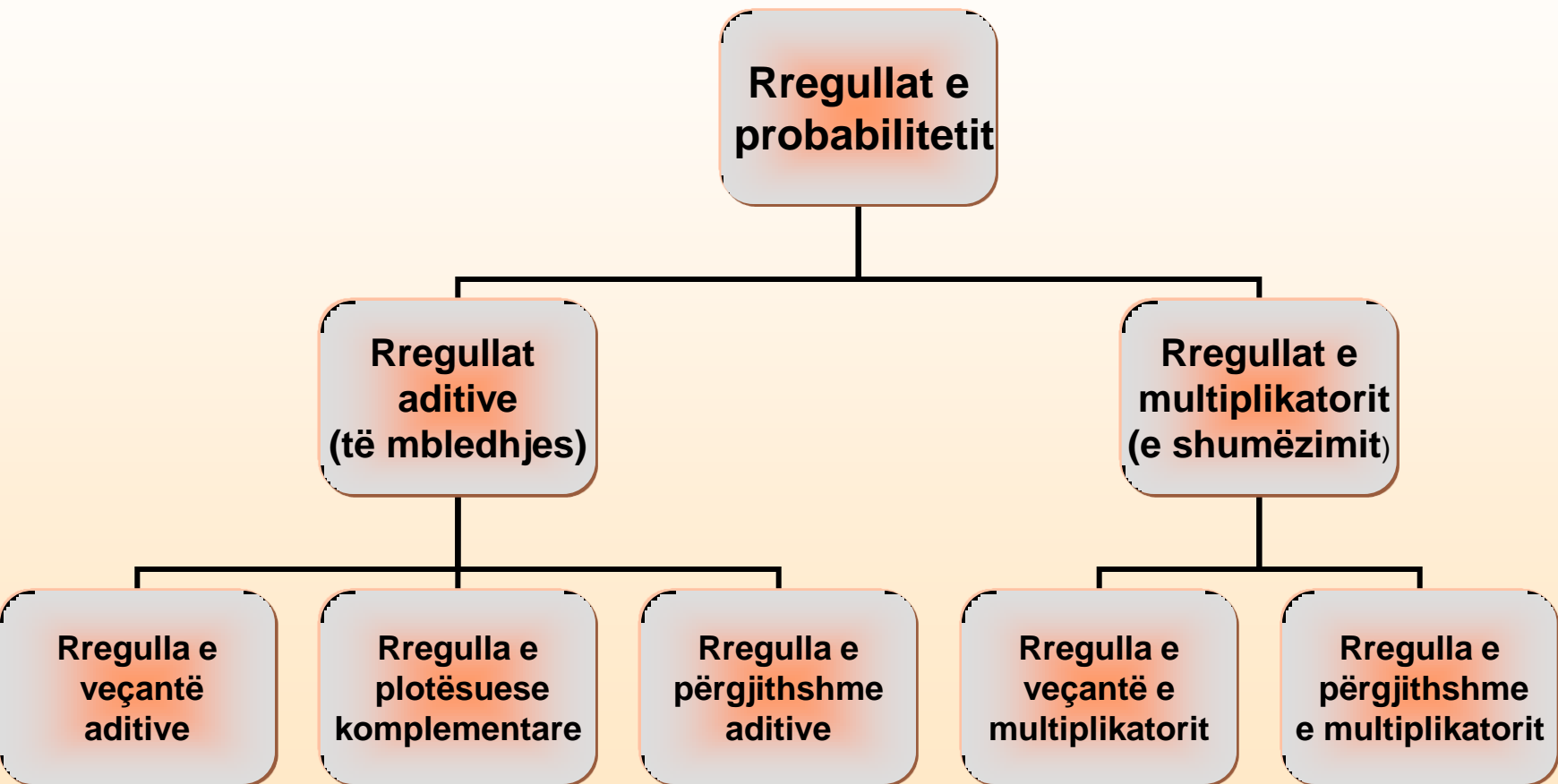
- Përgjatë karrrierës së saj prof. Anitë ka shpërblyer 186 studentë me A nga 1200 studentë sa ajo i ka mësuar. Sa është probabiliteti që studenti në departamentin e saj në këtë semestër do të marrë A?
- Duke aplikuar konceptin e frekuencave relative probabiliteti për një A është
  - $P(A) = 186/1200 = 0.155$

## Probabiliteti subjektiv

- **Probabiliteti subjektiv:** Gjasat (probabiliteti) për ndodhjen e një ngjarje të veçantë që caktohet nga individi duke u bazuar në kombinimet e përvojave të kaluara të individit, opinionin personal dhe analizës së situatave të vecanta.
- Si shembuj të probabilitetit subjektiv mund të shërbejnë si vijon:
  - *Vlerësimi i probabilitetit se klubi futbollistik “X” do të luajë vitin e ardhshëm në ligën e kampionëve.*
  - *Vlerësimi i probabilitetit se studenti do të marrë notën 10 nga ndonjë lëndë e caktuar, etj*



# Disa rregulla të probabilitetit



## Rregullat bazë të probabilitetit

- Nëse ngjarjet janë reciprokisht përjashtuese, atëherë ndodhja e ndonjë nga ngjarjet pamundëson ndodhjen e ngjarjeve të tjera.
- **Rregullat aditive ( të mbledhjes):** Nëse dy ngjarje A dhe B janë reciprokisht përjashtuese, *rregulla e veçantë aditive* thotë se probabiliteti i ndodhjes së **A ose B** është e barabartë me shumën e probabiliteteve të tyre.  

$$P(A \text{ ose } B) = P(A) + P(B)$$
- *Rregulla e veçantë aditive*  $P(A \text{ ose } B \text{ ose } C) = P(A) + P(B) + P(C)$

## Shembull 3

- Aeroporti X së voni ka marrë informata për fluturimet nga Prishtina në Gjenevë

Arritja	Frekuenca
Herët	100
Vonë	75
Në kohë	800
Anuluar	25
Gjithsej	1000

## Shembull 3 *vazhdim*

- Nëse A është ngjarja se fluturimi arrin herët, atëherë probabiliteti  $P(A) = 100/1000 = 0.1$
- Nëse B është ngjarja se fluturimi do të arrijë vonë , atëherë  $P(B) = 75/1000 = 0.075$
- Probabiliteti se aeroplani do të vijë herët ose do të arrijë vonë është;

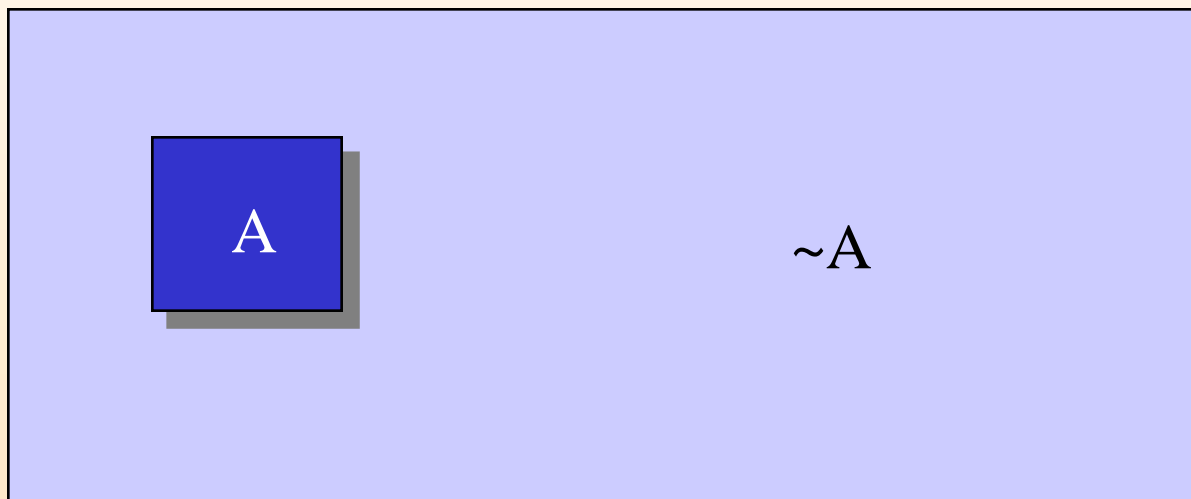
$$P(A \text{ ose } B) = P(A) + P(B) = 0.1 + 0.075 \\ = 0.175$$

## Rregulla plotësuese/komplementare

- *Rregulla plotësuese/komplementare*  
/përdoret për probabilitetin se një ngjarje që do të ndodhë përmes heqjes së probabilitetit të një ngjarje që nuk do të ndodhë nga 1.
- Nëse  $P(A)$  është probabiliteti i ngjarjes  $A$  dhe  $P(\sim A)$  është plotësues i  $A$ , atëherë  $P(A) + P(\sim A) = 1$  ose  $P(A) = 1 - P(\sim A)$ .

## Rregulla komplementare/plotësuese *vazhdim*

- Diagrami i Ven-it (J.Venn 1834–1888) ilustron rregullën komplementare që do të duket si në vijim:

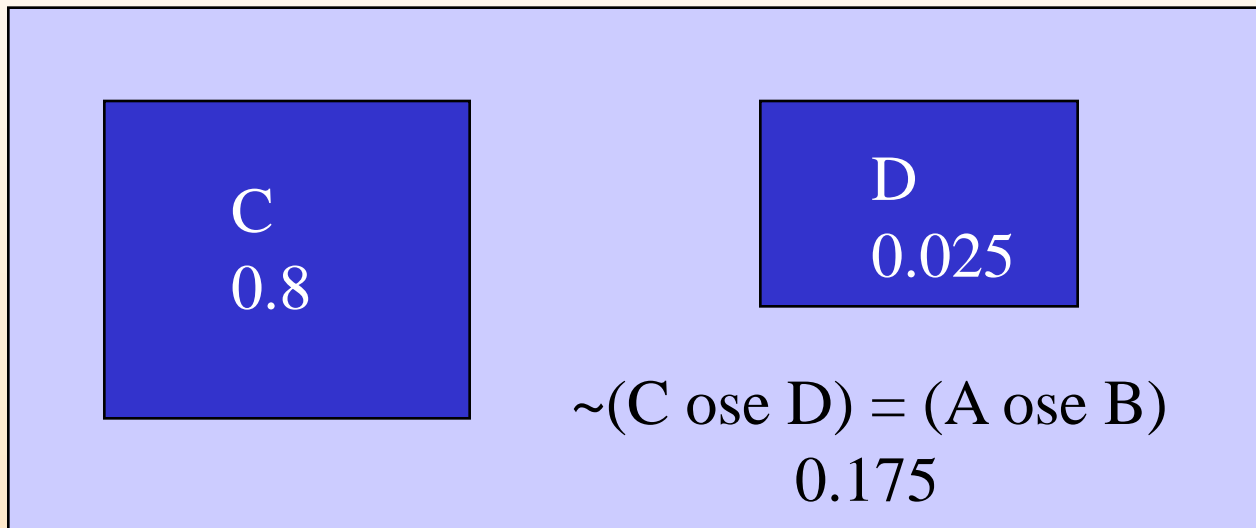


## SHEMBULL 4

- I rikthehemi **SHEMBULLIT 3**.
- Nëse C është ngjarja se fluturimi do të arrijë në kohë, atëherë,  $P(C) = 800/1000 = 0.8$ .
- Nëse D është ngjarja se fluturimi është shtyrë, atëherë,  $P(D) = 25/1000 = 0.025$ .
- Shfrytëzoni rregullën komplementare për të treguar se probabiliteti i një fluturimi të hershëm (A) ose të vonshëm (B) është 0.175.

SHEMBULL 4 *vazhdim*

- $P(A \text{ ose } B) = 1 - P(C \text{ ose } D) = 1 - [0.8 + 0.025] = 0.175$





## Rregulla aditive e përgjithshme

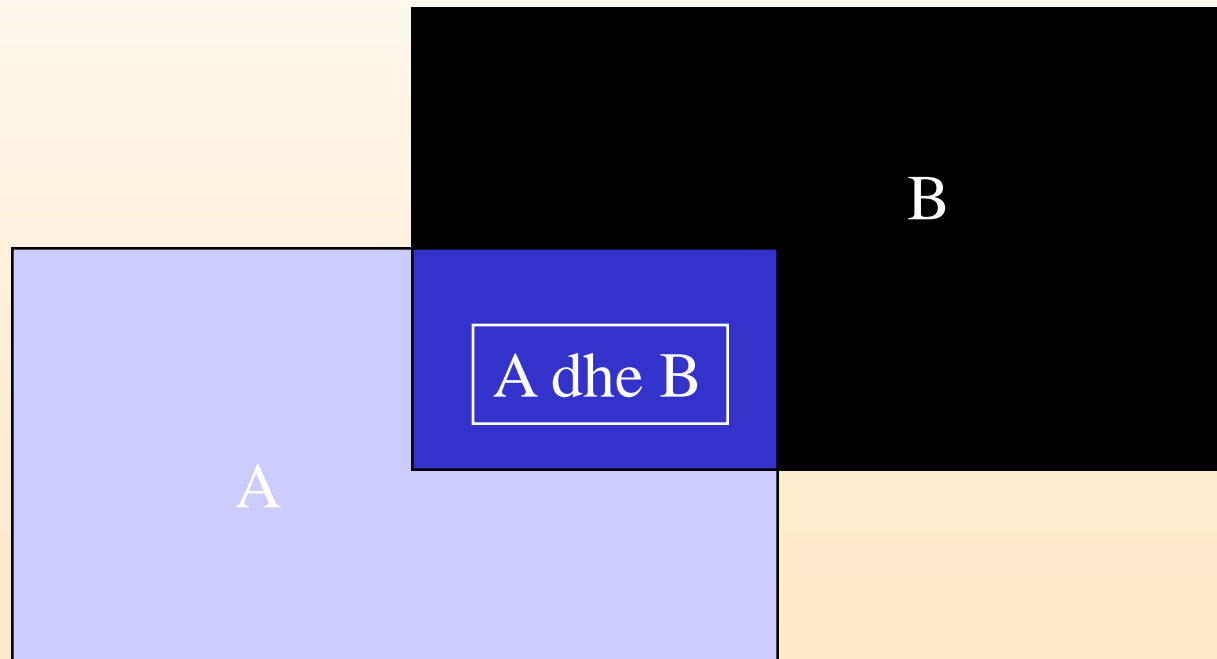
- Nëse A dhe B janë dy ngjarje që nuk janë reciprokisht përjashtuese, atëherë,

$P(A \text{ ose } B)$  është i dhënë me formulën vijuese:

- $P(A \text{ ose } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ dhe } B)$

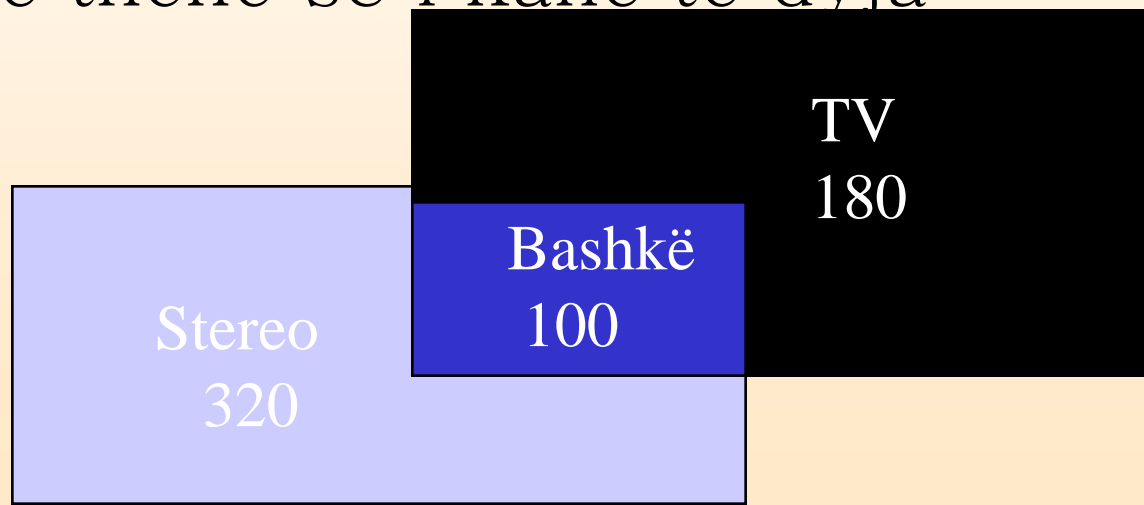
## Rregulla aditive e përgjithshme

- Diagram i Ven-it ilustron këtë rregull:



# SHEMBULL 5

- Në një mostër prej 500 studentëve, 320 kanë thënë se kanë stereo , 180 kanë thënë se kanë TV, dhe 100 kanë thënë se i kanë të dyja:



SHEMBULL 5 *vazhdim*

- Nëse studenti zgjedhet rastësisht , sa është probabiliteti që studenti të ketë vetëm stereo, vetëm TV dhe të dyja stereo dhe TV?
- $P(\text{St}) = 320/500 = 0.64.$
- $P(\text{Tv}) = 180/500 = 0.36.$
- $P(\text{St dhe Tv}) = 100/500 = 0.20.$

SHEMBULL 5 *vazhdim*

- Nëse studenti zgjedhet rastësisht, sa është probabiliteti që studenti ka gjithashtu stereo ose TV në shtëpinë e tij?
- $P(\text{St ose TV}) = P(\text{St}) + P(\text{TV}) - P(\text{St dhe T}) = 0.64 + 0.36 - 0.20 = 0.80.$

- Studenti është duke mbajtur dy kurse në histori dhe matematikë. Probabiliteti se studenti do ta jap historinë është 0.60, kurse probabiliteti se do ta jap matematikën është 0.70. Probabiliteti se do t'i kaloj të dyja është 0.50. Sa është probabiliteti se së paku do ta jap njërin provim.
- $P(A \text{ ose } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ dhe } B) = 0.60 + 0.70 - 0.50 = 0.8.$

## Probabiliteti i përbashkët

- **Probabiliteti i përbashkët** është probabiliteti që mat gjasat se dy ose më shumë ngjarje do të ndodhin njëkohësisht. Një shembull do të jetë ngjarja që studenti i ka të dyja, stereon dhe TV në shtëpinë e tij.

## Rregulla e veçantë e multiplikatorit

- Rregulla e veçantë e multiplikatorit kërkon që dy ngjarje A dhe B të jenë *të pavarura*.
- Dy ngjarje A dhe B janë *të pavaura* nëse ndodhja e njërës nuk ka efekt në probabilitetin e ndodhjes së tjetrës.
- Rregulla e *veçantë e multiplikatorit* është  $P(A \text{ dhe } B) = P(A) \cdot P(B)$



## SHEMBULL 6

- Shpendi posedon dy fletëaksione të cilat janë të pavaruara nga njëra tjetra. Probabiliteti që fletëaksioni A të rritet në vlerë në vitin e ardhshëm është 0.5. Probabiliteti se vlera e aksionit B do të rritet në vitin e ardhshëm është 0.7.
- Sa është probabiliteti se vlera e të dy aksioneve do të rriten vitin e ardhshëm?
- $P(A \text{ dhe } B) = (0.5)(0.7) = 0.35$ .

## Probabiliteti i kushtëzuar

- **Probabiliteti i kushtëzuar** është probabiliteti i ndodhjes së një ngjarje të veçantë duke ditur që një ngjarje tjetër ka ndodhur.
- **Vërejtje:** Probabiliteti i ngjarjes A duke ditur që do të ndodhë ngjarja B shënohet me  $P(A|B)$ .

## Rregulla e përgjithshme e multiplikatorit

- **Rregulla e përgjithshme e multiplikatorit** përdoret për të gjetur probabilitetin e përbashkët se dy ngjarje që do të ndodhin dhe definohet kështu: *për dy ngjarje A dhe B, probabiliteti i përbashkët se të dy ngjarjet do të ndodhin gjindet përmes shumëzimit të probabilitetit se ngjarja A do të ndodhë me probabilitetin e kushtëzuar të B duke ditur se ngjarja A ka ndodhur.*

$$P(A \text{ dhe } B) = P(A) \cdot P(B / A)$$

- Në një anketë, punëtorët e kompanisë „X”, në pyetjen se: Nëse do t’iu ipej një mundësi për të punuar në një kompani tjetër, me pozitë të njejtë apo më të mirë se kjo që keni tani, do të dëshironit ta ndërronit?
- Përgjigjet e tyre janë të klasifikuara në bazë të përvojës së tyre në atë kompani sipas tabelës vijuese:

## Lojaliteti i punëtorëve ndaj kompanisë dhe përvoja e tyre e punës

Përvoja - >	Me pak se një vit	1- 5vite	6-10 vite	Më shumë se 10vite	Totali
Do të qëndrojnë	10	30	5	75	120
Nuk do të qëndrojnë	25	15	10	30	80
Totali	35	45	15	105	200

- Sa është probabiliteti se një punëtor i zgjedhur rastësisht nga kjo kompani do të qëndrojë në atë kompani dhe që ka më shumë se 10 vjet përvojë pune ?

- $P(A)$  - do të qëndroj në kompani
- $P(B)$  ka përvojë pune më se 10 vjet
- $P(B|A)$  – qëndron në kompani dhe ka përvojë më se 10 vite

$$\begin{aligned}P(A \text{ dhe } B) &= P(A) \times P(B|A) \\ &= 120/200 \times 75/120 \\ &= 9000/24000 \\ &= 0.375\end{aligned}$$

- Bordi i drejtorëve të firmës “X” përbëhet nga 8 meshkuj dhe katër femra. Një komitet prej katër anëtarëve duhet të zgjidhet në mënyrë të rastësishme për të rekomanduar presidentin e ri të kompanisë.
- a) Sa është probabiliteti që të katër anëtarët e këtij komiteti të jenë femra?
- b) Sa është probabiliteti që të katër anëtarët të jenë meshkuj.
- c) Shuma e probabiliteteve për A dhe B a është e barabartë me 1? Spjego.



- a) 0.002

$$\left(\frac{4}{12}\right) \cdot \left(\frac{3}{11}\right) \cdot \left(\frac{2}{10}\right) \cdot \left(\frac{1}{9}\right) = 0.002$$

- b) 0.14

$$\left(\frac{8}{12}\right) \cdot \left(\frac{7}{11}\right) \cdot \left(\frac{6}{10}\right) \cdot \left(\frac{5}{9}\right) = \frac{1680}{11880} = 0.1414$$

# Disa parime të llogaritjes

- Rregullat për llogaritjen e numrit të rezultateve të mundshme:
- *Rregulla 1.*
- **Formula e Multiplikatorit:** Nëse ka  $m$  mënyra për ta bërë një gjë dhe  $n$  mënyra për ta bërë një tjetër, atëherë ka  $m \times n$  mënyra për t'i bërë të dyja.
- **Shembull 10:**

Ju dëshironi të shkoni në park, të hani në restaurant dhe të shihni filma. Janë 3 parqe, 4 restorante dhe 6 kinema. Sa kombinime të ndryshme të mundshme janë:
- *Përgjigje:*
- $3 \times 4 \times 6 = 72$  mundësi të ndryshme

- Rregulla 2

- Mënyrat se si mund të rregullohen  $n$  elemente sipas rregullit është:

$$n! = (n)(n - 1)\dots(1)$$

- *Shembull*
  - Restorani i juaj ka pesë zgjedhje në menynë e tij. Në sa mënyra ju mund të porositni për menynë tuaj?

*Përgjigje:*

$5! = (5)(4)(3)(2)(1) = 120$  mundësi të ndryshme.

# Rregullat e llogaritjes

(vazhdim)

- Rregulla 3.
- **Permutacionet:** çdo rregullim i  $X$  elementeve i zgjedhur nga  $n$  elementet e mundshme.

- **Shembull:**

- Restoranti i juaj ka pesë zgjedhje kurse tri duhet të zgjidhen për drekë. Sa mënyra të ndryshme mund të porositet dreka?

$${}_n P_x = \frac{n!}{(n-x)!}$$

**Përgjigje:**

$${}_n P_x = \frac{n!}{(n-x)!} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{120}{2} = 60$$

**Vërejte:** Renditja e rregullimit të elementeve është e rëndësishme te permutacionet.

# Rregullat e llogaritjes

(vazhdim)

- Rregulla 4
- **Kombinacionet:** Numri i mënyrave të zgjedhjes së  $x$  elementeve nga grupi i  $n$  elementeve pa respektuar renditjen

$${}_n C_x = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

- Shembull:
  - Restoranti i juaj ka pesë meny për zgjedhe dhe tri duhet të zgjidhen për drekë . Sa mënyra të ndryshme mund të bëhet kombinimi duke injoruar rregullin e zgjedhjes.

- Përgjigje:  ${}_5 C_3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!(2)!} = \frac{120}{(6)(2)} = 10$

## SHEMBULL 11

- Trajneri X duhet të zgjedhë pesë lojtarë në mes të 12 sa i ka në ekip për të formuar formacionin fillestar. Sa grupe të ndryshme janë të mundshme?

$${}_{12}C_5 = (12!)/[5!(12-5)!] = 792$$

- Supozojmë se Trajneri X duhet ti rangoj ata kësisoj:

$${}_{12}P_5 = (12!)/(12-5)! = 95,040.$$

## Konceptet kyçe

- Probabiliteti
- Eksperimenti
- Rezultati
- Ngjarja
- Hapësira e mostrës
- Probabiliteti apriori
- Probabiliteti aposteriori
- Probabiliteti subjektiv
- Ngjarje e thjeshtë
- Ngjarje komplementare
- Ngjarjet e papajtueshme

- Ngjarjet e domosdoshme
- Ngjarjet e kushtëzuara
- Regulla aditive e thjeshte
- Rregulla aditive e përgjithshme
- Rregulla komplementare
- Rregulla e multiplikatorit
- Rregulla e përgjithshme e multiplikatorit
- Permuatacionet
- Kombinacionet
- Variacionet